باسمه تعالی

امتحان آزمایشی درس ذره

(امتحان اصلی از این امتحان طولانی‌تر است. برای این امتحان حدود ۳ ساعت وقت صرف کنید.)

<u>سؤال ۱</u> به قضیه زیر <u>تعمیم قضیه کاکوتانی</u>، یا <u>قضیه کاکوتانی ـ یامابه ـ یوجوبو</u> گفته می‌شود:

<u>قضیه</u>: اگر $f: S^n \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، $x_0, x_1, \dots, x_n$ (نقاطی روی S^n) وجود دارند که برهم عمود باشند و $f(x_0) = \dots = f(x_n)$

در این قضیه منظور از عمود بودن $a = (a_1, \dots, a_n)$ و $b = (b_1, \dots, b_n)$ آن است که

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0$$

با استفاده از قضیه کاکوتانی ثابت کنید (لازم نیست خود قضیه بالا ثابت شود)

<u>قضیه</u>: اگر A یک ناحیه محدب بسته در $\mathbb{R}^3$ باشد، مکعبی در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد که شامل A باشد و هر یک از وجه‌های آن بر A مماس باشد.

توجه کنید که مماس بودن می‌تواند روی ضلع‌ها یا رأس‌های مکعب اتفاق بیافتد و معنای آن این است که A با وجه مورد نظر برخورد دارد و کاملاً در یک طرف آن قرار می‌گیرد.

<u>سؤال ۲</u>. قضیه زیر که به <u>قضیه توپ مودار</u> معروف است را اثبات کنید.

<u>قضیه</u>: فرض کنید $f: S^2 \to \mathbb{R}^3$ تابعی است پیوسته به طوری که برای هر $x \in S^2$، بردارهای x و $f(x)$ (به عنوان بردارهایی در $\mathbb{R}^3$) برهم عمود هستند (به همان معنای بالا) در این صورت $x \in S^2$ وجود دارد به طوری که $f(x) = 0$

(<u>راهنمایی</u>: فرض کنید چنین x ای وجود ندارد. تابع $g: S^2 \to S^1$ را از روی f طوری بسازید که $g(-x) = -g(x)$. سپس از قضیه بورساک ـ اولام استفاده کنید و به تناقض برسید)